

## Séries de entières

*Fiche d'exercices numéro 4.*

### Exercice 1.

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n,$$

$$4. i(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} x^n,$$

$$2. g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+a}{n+b} \right)^n x^n \text{ (où } a, b > 0),$$

$$5. j(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 4n - 1}{n+4} \frac{1}{n!} x^n.$$

$$3. h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n,$$

### Exercice 2.(Somme des séries entières)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^n,$$

$$4. i(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n,$$

$$2. g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^n x^n,$$

$$5. j(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n,$$

$$3. h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

$$6. k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n) x^n.$$

### Exercice 3.

Donner l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles les fonctions suivantes sont bien définies

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}.$$

Sont-elles continues sur leur ensemble de définition ?

### Exercice 4.

Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}; \quad g(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad h(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad l(x) = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^3.$$

**Exercice 5.** Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ . (On pourra utiliser la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  dont on calculera la dérivée).

### Exercice 6.

1. a. Soit  $m \in \mathbb{R}$ ; résoudre sur  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle  $(1+x)y' - my = 0$ .

- b. Cette équation admet-elle des solutions développables en série entière dans un intervalle du type  $] - A, A[$  ( $A > 0$ )?
  - c. En déduire que  $(1+x)^m$  est développable en série entière à l'origine et donner son développement.
2. On considère la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$
- a. Calculer son rayon de convergence et déterminer le domaine de convergence  $D$ .
  - b. En chaque point  $z$  de  $D$ , on désigne par  $S(z)$  la somme de cette série. Quel est le domaine de continuité de  $S$ .
  - c. Calculer  $S(z)$  en chaque point de  $D$ .
  - d. En déduire la valeur de la somme de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ .

**Exercice 7.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad y(0) = 1 \quad (1)$$

On suppose qu'il existe une solution développable en série entière de (1), c'est-à-dire telle que  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  avec un rayon de convergence  $R > 0$ .

1. Calculer  $a_0$ .
2. Calculer  $a_1$  et trouver une relation entre  $a_{n+1}$  et  $a_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .
3. Déduire des questions précédentes la valeur des coefficients  $a_n$  pour  $n \geq 0$ . On montrera en particulier que pour  $p \geq 0$ ,  $a_{2p+1} = 0$  et  $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$ . Donner le développement de la solution  $y$  ainsi trouvée.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$ . En déduire la convergence de la série entière trouvée à la question précédente.
5. Calculer la somme de la série entière  $y$  en utilisant la fonction sinus.
6. Que peut-on conclure pour la fonction ainsi trouvée au voisinage de 0?

**Exercice 8.** On suppose que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x \in ]-R, R[$ .

1. Que vaut  $f(2x)$  et sur quel intervalle la formule est-elle valide?
2. On suppose que

$$f(2x) - f(x) = \ln(1-x) \quad (2)$$

Ecrire l'égalité sous la forme  $b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 0$ , où les  $b_n$  sont à préciser et indépendants de  $x$ .

3. Pourquoi est-ce que  $b_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ?
4. En déduire que  $a_n = \frac{1}{n(1-2^n)}$ ,  $n \geq 1$ .
5. Quel est le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue?
6. Ecrire les séries entières solutions de (2).

**Exercice 9.**

Déterminer le rayon de convergence  $\rho$  de la série entière de la variable réelle  $x$  :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1.3.....(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Montrer que la fonction somme  $f$  est solution d'une équation différentielle du premier ordre.  
En déduire une expression explicite de  $f$ .

**Exercice 10.**

Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  avec

$$|q| < 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 - qx)f(qx).$$

Montrer que  $f$  est développable en série entière.